

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΤΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΞΕ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

α. Η μέση τιμή των βαθμών είναι:

$$\bar{x} = \frac{8+14+20+12+16}{5} = \frac{70}{5} = 14.$$

β. Το μέγεθος του δείγματος των βαθμών είναι  $n=5$  (περιττό). Άρα, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τους βαθμούς έχουμε:

8, 12, 14, 16, 20,

συνεπώς η διάμεσος  $\delta$  των βαθμών είναι:  $\delta = x_3 = 14$ .

γ. Υπολογίζουμε τη διακύμανση  $s^2$  των βαθμών:

$$s^2 = \frac{(8-14)^2 + (12-14)^2 + (14-14)^2 + (16-14)^2 + (20-14)^2}{5} =$$

$$= \frac{36+4+0+4+36}{5} = \frac{80}{5} = 16.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση  $s$  των βαθμών είναι:  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

δ. Για το εύρος  $R$  των βαθμών έχουμε:  $R = x_{\max} - x_{\min} = 20 - 8 = 12$ .

ε. Υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβλητότητας των βαθμών

$$(x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5). \text{ Είναι: } CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{4}{14} \cdot 100 = \frac{200}{7},$$

άρα  $CV \cong 28,6\% > 10\%$ , επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

α. Για  $x < 1$  είναι  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)}$ , άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\lambda(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2\lambda}.$$

β. Για  $x > 1$  είναι  $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ , άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}.$$

γ. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ με } f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Συνεπώς: } \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με:

$$f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}.$$

Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$(f'(x))' = f''(x) = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} (\lambda x)' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

β. Έχουμε :  $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι: } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

$$\text{Άρα } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}, \text{ δηλαδή } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

γ. i) Όταν  $\lambda=2$ , η  $f(x)$  γίνεται:  $f(x) = e^{2x}$ , άρα  $f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Όταν  $\lambda=-1$ , η  $f(x)$  γίνεται:  $f(x) = e^{-x}$ , άρα  $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

α. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f'(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008 \right)' = \left( \frac{1}{3}x^3 \right)' - (2x^2)' + (3x)' + (2008)', \text{ άρα}$$

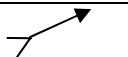
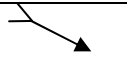

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}.$$

β. Θέτουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\text{Είναι } \Delta=4>0, \text{ οπότε } x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

δηλαδή οι ρίζες είναι:  $x_1 = 3, x_2 = 1$ .

Ο πίνακας μεταβολών και προσήμου της  $f'(x)$  είναι:

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				
		ΤΟΠ. ΜΕΓ.	ΤΟΠ. ΕΛΑΧ.	

Συνεπώς η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 1]$ ,  $[3, +\infty)$ , ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, 3]$ , άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x=1$  το  $f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 2008 = \frac{6028}{3}$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x=3$  το

$$f(3) = \frac{1}{3} 27 - 18 + 9 + 2008 = 2008.$$

γ. Η  $f$  στο διάστημα  $[1, +\infty)$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(3)=2008$ , αφού:

- Για  $1 \leq x < 3$  ισχύει  $f(x) > f(3) = 2008$  (επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα)
- Για  $x > 3$  ισχύει  $f(x) > f(3) = 2008$  (επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα)

Άρα για κάθε  $x \in [1, +\infty)$  ισχύει  $f(x) \geq f(3) = 2008$ .