

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**  
**Συστήματα πολλών εισόδων πολλών εξόδων**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

**ΕΚΔΟΧΗ 1.5, Νοέμβριος 2002**



# Περιεχόμενα

<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b> .....	<b>3</b>
<b><u>1</u></b> <b><u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ</u></b> .....	<b>4</b>
1.1 <b>Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</b> .....	<b>4</b>
1.2 <b>ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</b> .....	<b>5</b>
1.2.1 <b>ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ</b> .....	<b>7</b>
1.3 <b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>7</b>
1.4 <b>ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>8</b>
1.5 <b>ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>10</b>
1.6 <b>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>12</b>
1.6.1 <b>ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ</b> .....	<b>12</b>
1.6.2 <b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ</b> .....	<b>12</b>
1.6.3 <b>ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ-ΕΝΤΟΠΙΣΙΜΟΤΗΤΑ</b> .....	<b>13</b>
1.6.4 <b>ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ</b> .....	<b>13</b>
1.7 <b>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</b> .....	<b>15</b>
<b><u>2</u></b> <b><u>ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΛΕΓΚΤΩΝ</u></b> .....	<b>22</b>
2.1 <b>ΡΥΘΜΙΣΗ</b> .....	<b>22</b>
2.2 <b>ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΛΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ</b> .....	<b>23</b>
2.3 <b>ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ</b> .....	<b>24</b>
2.4 <b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</b> .....	<b>27</b>
2.4.1 <b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ</b> .....	<b>29</b>
<b><u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u></b> .....	<b>32</b>

# 1 Ανάλυση συστημάτων στο χώρο καταστάσεων

## 1.1 Η έννοια του χώρου κατάστασης

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι μία περιγραφή στο πεδίο του χρόνου και ισχύει για μια πολύ μεγάλη κατηγορία συστημάτων όπως τα γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα, τα χρονικά μεταβαλλόμενα και μη συστήματα, τα συστήματα με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και άλλα. Με τον όρο κατάσταση ενός συστήματος αναφερόμαστε στο παρελθόν, στο παρόν και στο μέλλον του συστήματος. Από μαθηματικής πλευράς, η κατάσταση του συστήματος εκφράζεται με τις μεταβλητές κατάστασης. Συνήθως, ένα σύστημα περιγράφεται από ένα ελάχιστο πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων που συμβολίζονται  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  και ορίζονται ως εξής:

**Ορισμός 1.1:** Οι μεταβλητές κατάστασης  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  ενός συστήματος ορίζονται ως ένας (ελάχιστος) αριθμός μεταβλητών τέτοιων ώστε αν γνωρίζουμε τις τιμές τους για οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t_0$ , την συνάρτηση εισόδου που εφαρμόζεται στο σύστημα για  $t > t_0$ , και τον μαθηματικό νόμο που συνδέει την είσοδο, τις μεταβλητές κατάστασης και το σύστημα, τότε καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t > t_0$ .

Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου παρίσταται ως εξής:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1.2)$$

Το διάνυσμα εισόδου συμβολίζεται με  $\mathbf{u}(t)$  και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $r$  είναι το πλήθος των εισόδων. Το διάνυσμα εξόδου συμβολίζεται με  $\mathbf{y}(t)$  και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $m$  είναι το πλήθος των εξόδων. Το διάνυσμα κατάστασης συμβολίζεται με  $\mathbf{x}(t)$  και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $n$  είναι το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης.

Οι πίνακες  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  καλούνται *πίνακες του χώρου κατάστασης* (state-space matrices).

Οι εξισώσεις κατάστασης (1.1-1.2) αποτελούν για την επιστήμη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου μια μοντέρνα μέθοδο περιγραφής συστημάτων. Η μέθοδος αυτή έχει ιδιαίτερη θεωρητική, υπολογιστική και πρακτική αξία κυρίως επειδή μπορούν να περιγράψουν μια μεγάλη κατηγορία συστημάτων, όπως τα γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα, τα χρονικά μεταβαλλόμενα και μη συστήματα, τα συστήματα με αρχικές συνθήκες και άλλα.

Οι μεταβλητές κατάστασης ίσως δεν μπορούν πάντα να παρατηρηθούν ή να μετρηθούν, επηρεάζουν όμως την συμπεριφορά του συστήματος. Είναι αυτές που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται το σύστημα και κατά κάποιο τρόπο "αποθηκεύουν" την προηγούμενη συμπεριφορά του.

Το σύστημα προσδιορίζεται εντελώς κάθε χρονική στιγμή  $t$  όταν ξέρουμε την ιστορία των εισόδων  $\{\mathbf{u}(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$  και την τωρινή και αρχική τιμή των μεταβλητών καταστάσεων  $\mathbf{x}(0)$  και  $\mathbf{x}(t)$ . Η ενδιάμεση μετεξέλιξη του συστήματος την περίοδο  $0 < \tau < t$  έχει καταγραφεί στις μεταβλητές κατάστασης.

## 1.2 Μετασχηματισμοί κατάστασης

Έστω το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.2)$$

και ένας ομαλός  $n \times n$  πίνακας  $M$ . Το διάνυσμα,

$$z = Mx$$

καλείται *μετασχηματισμένο διάνυσμα κατάστασης*.

Μπορούμε εύκολα να μετασχηματίσουμε το σύστημα (1.1-1.2) έτσι ώστε να έχουμε τις εξισώσεις κατάστασης ως προς  $z$ . Στην πραγματικότητα το  $z$  δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός των αρχικών καταστάσεων. Έχουμε:

$$\dot{z} = M\dot{x} = M(Ax + Bu) = Max + MBu$$

Όμως

$$x = M^{-1}z$$

και αντικαθιστώντας,

$$\dot{z} = MAM^{-1}z + MBu$$

$$y = CM^{-1}z$$

Ορίζοντας τους μετασχηματισμένους πίνακες,

$$\hat{A} = MAM^{-1}$$

$$\hat{B} = MB$$

$$\hat{C} = CM^{-1}$$

λαμβάνουμε τις μετασχηματισμένες εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$$

$$y = \hat{C}z$$

Προσέξτε ότι οι πίνακες  $A$  και  $\hat{A}$  έχουν πάντα τις ίδιες ιδιοτιμές και συνεπώς ο μετασχηματισμός  $M$  δεν αλλάζει τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος.

### 1.2.1 Διαγώνιος μετασχηματισμός

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων  $W$ , και τον πίνακα των ιδιοτιμών  $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε  $\lambda_i \neq \lambda_j$  (αλλιώς αντικαθιστούμε τις πολλαπλές ιδιοτιμές  $\lambda_i$  με τα αντίστοιχα μπλοκ Jordan, δες Παράρτημα). Ισχύει:

$$A = W \Lambda W^{-1}$$

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε τον μετασχηματισμό  $M = W^{-1}$ . Ο μετασχηματισμένος πίνακας του συστήματος είναι,

$$\hat{A} = M A M^{-1} = W^{-1} A W = W^{-1} (W \Lambda W^{-1}) W = \Lambda$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Οι μετασχηματισμένοι πίνακες εισόδων και εξόδων είναι,

$$\hat{B} = W^{-1} B \text{ και } \hat{C} = C W$$

Αν τις μετασχηματισμένες καταστάσεις τις καλέσουμε  $\xi$  θα έχουμε:

$$\dot{\xi} = A \xi + \hat{B} u$$

$$y = \hat{C} \xi$$

Οι καταστάσεις  $\xi$  καλούνται *αποσυζευγμένες καταστάσεις* (decoupled states) και έχουν την βασική ιδιότητα ότι η συμπεριφορά τους είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες: σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή  $\lambda_k$  αντιστοιχεί και μία διαγώνια κατάσταση.

### 1.3 Πίνακας μεταφοράς συστημάτων

Το πολυμεταβλητό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (1.2)$$

μπορεί να μετασχηματιστεί κατά Laplace όπως και τα βαθμωτά συστήματα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στη θέση της βαθμωτής συνάρτησης μεταφοράς προκύπτει ένας πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς.

Θεωρώντας λοιπόν μηδενικές αρχικές συνθήκες, ο μετασχηματισμός Laplace των (1.1)-(1.2) δίνει,

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s)=\mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{X}(s)$$

Επομένως,

$$\mathbf{Y}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]U(s)$$

και ο πίνακας μεταφοράς (transfer matrix) είναι,

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] \quad (1.3)$$

Η διάσταση του  $\mathbf{G}(s)$  είναι  $m \times r$ .

Μία βασική ιδιότητα του πίνακα μεταφοράς είναι ότι παραμένει αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς του διανύσματος κατάστασης.

## 1.4 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω το γραμμικό, μη ομογενές, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

Υποθέτοντας μία λύση  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$  και αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] &= e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) \\ &= e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) \\ &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t) \\ \Rightarrow e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{c} \\ \Rightarrow \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ο πίνακας  $\Phi(t)=e^{\mathbf{A}t}$  καλείται *πίνακας μετάβασης* από την αρχική στιγμή  $t_0=0$  στην χρονική στιγμή  $t$ . Υπολογίζεται εύκολα με την χρήση του διαγώνιου μετασχηματισμού:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}t = \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}t)\mathbf{W}^{-1}$$



$$\Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = \mathbf{W} e^{At} \mathbf{W}^{-1}$$

όπου,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

και  $\mathbf{W}$  ο πίνακας των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων.

Συνεπώς κάθε φορά θα πρέπει να υπολογίζουμε τον διαγώνιο μετασχηματισμό  $\mathbf{W}$ , τον αντίστροφο  $\mathbf{W}^{-1}$ , τον πίνακα ιδιοτιμών  $\mathbf{A}$  και μετά να υπολογίζουμε την εκθετική παράσταση,  $e^{At}$ .

Αν το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή περιγράφεται από την,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.3)$$

η λύση απλουστεύεται καθώς η (1.2) γίνεται,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) \quad (1.4)$$

και μετασχηματίζοντας σε μορφή Jordan μέσω της  $\mathbf{x} = \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}$ , λαμβάνουμε,

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\xi}(t) = e^{At} \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}(0)$$

ή 
$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{W}^{-1} e^{At} \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}(0) = e^{At} \boldsymbol{\xi}(0)$$

Η αρχική συνθήκη  $\boldsymbol{\xi}(0)$  βρίσκεται εύκολα αφού,

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}(0)$$

(όπου το  $\mathbf{v}_i^T$  είναι η  $i$ -οστή γραμμή του  $\mathbf{W}^{-1}$ ).

Έτσι, η (1.4) γίνεται,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}(t) = [\mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_n] \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{w}_1 \boldsymbol{\xi}_1(t) + \dots + \mathbf{w}_n \boldsymbol{\xi}_n(t) \\ &= (\mathbf{v}_1^T \mathbf{x}(0)) e^{\lambda_1 t} \mathbf{w}_1 + \dots + (\mathbf{v}_n^T \mathbf{x}(0)) e^{\lambda_n t} \mathbf{w}_n \end{aligned} \quad (1.5)$$

Η ανάπτυξη αυτή καλείται *αποσύνθεση modal*. Καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο η συνολική χρονική απόκριση συντίθεται από ένα άθροισμα επιμέρους αποκρίσεων που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος.

## 1.5 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

Η θεωρία των γραμμικών συστημάτων δεν είναι απαραίτητα περιοριστική. Μη γραμμικά συστήματα μπορούν να γραμμικοποιηθούν γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας, και το προκύπτον σύστημα να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και σύνθεση του συστήματος. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Έστω ότι έχουμε το εξής μη γραμμικό σύστημα  $n$  μεταβλητών κατάστασης  $x_i$ ,  $m$  εξόδων  $y_j$  και  $r$  εισόδων  $u_k$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι εισοδοί σταθεροποιούνται σε ένα ορισμένο επίπεδο,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* = \text{σταθερό}$$

Καλούμε *καταστάσεις (σημεία) ισορροπίας* του συστήματος τα διανύσματα  $\mathbf{x}^*$  που είναι λύσεις των εξισώσεων,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \text{ δηλαδή } \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$$

Έστω ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν. Τα σημεία ισορροπίας των εξόδων θα δίνονται από την σχέση,

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μικρές μετατοπίσεις γύρω από την κατάσταση ισορροπίας:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \delta\mathbf{y}$$

και ας εφαρμόσουμε την ανάπτυξη Taylor των συναρτήσεων  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  και  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  γύρω από το σημείο ισορροπίας. Γνωρίζουμε ότι γενικά ισχύει:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

(όροι μεγαλύτερου βαθμού)

(1.6)

Παρατηρούμε ότι,

Θέτουμε:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$$

Παραβλέποντας τους όρους μεγαλύτερου βαθμού ή (1.6) γράφεται:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (1.7)$$

Με παρόμοιο τρόπο αναπτύσσουμε την  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  γύρω από το  $\mathbf{y}^*$ ,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^* + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + (\text{όροι μεγαλύτερου βαθμού})$$

Επειδή  $\delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$  οι μετατοπίσεις των εξόδων μπορούν να προσεγγιστούν από την γραμμική σχέση,

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x} \quad (1.8)$$

Συνδυάζοντας τις (1.7) και (1.8) παίρνουμε την γραμμική προσέγγιση του μη γραμμικού συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας:

$$\begin{aligned}\delta x &= A\delta x + B\delta u \\ \delta y &= C\delta x\end{aligned}$$

## 1.6 Ιδιότητες συστημάτων

### 1.6.1 Ελεγχιμότητα

Θεωρούμε το προαναφερθέν σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.2)$$

**Ορισμός 1.2** Ένα σύστημα καλείται *πλήρως ελέγξιμο* (*completely controllable*) αν δεδομένων των αρχικών συνθηκών κατάστασης  $x_0$  και μιας επιθυμητής τιμής καταστάσεων  $x^*$ , μπορούμε πάντα να βρούμε κατάλληλες και πεπερασμένες τιμές ελέγχου  $u(t)$  ώστε το σύστημα να φθάσει στην επιθυμητή τιμή σε πεπερασμένο χρόνο  $t < \infty$ .

**Θεώρημα 1.1** Το σύστημα (1.1)-(1.2) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνον αν ο  $n \times nr$  πίνακας ελεγχιμότητας,

$$\Gamma = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή  $\text{βαθμός}(\Gamma) = n$ .

### 1.6.2 Παρατηρησιμότητα

**Ορισμός 1.3** Ένα σύστημα καλείται *πλήρως παρατηρήσιμο* (*completely observable*) αν γνωρίζοντας τις τιμές των εξόδων  $y(t)$  και εισόδων  $u(t)$  για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα  $t$ ,  $0 < t < \infty$  τότε μπορούμε να ανακτήσουμε τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης  $x(t)$  για οποιαδήποτε χρονική στιγμή του διαστήματος  $[0, t]$ .

Αυτό σημαίνει ότι παρατηρώντας τις σχέσεις του συστήματος με το περιβάλλον (είσοδοι-εξοδοί) μπορούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος.

**Θεώρημα 1.2** Ένα σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνον αν ο  $nm \times n$  πίνακας παρατηρησιμότητας,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή βαθμός  $[\Theta] = n$ .

Η ελεγχιμότητα και η παρατηρησιμότητα είναι έννοιες *δ्विकές*.

### 1.6.3 Σταθεροποιησιμότητα-εντοπισιμότητα

Σε πρακτικές εφαρμογές είναι αρκετή μια πιο ασθενής ιδιότητα από την ελεγχιμότητα, η *σταθεροποιησιμότητα* (stabilizability). Η ιδιότητα αυτή συσχετίζεται με την ελεγχιμότητα των ασταθών πόλων.

Η ιδιότητα αυτή εξακριβώνεται μετασχηματίζοντας το σύστημα σε μορφή Jordan και ελέγχοντας τις γραμμές του πίνακα εισόδου  $B$  που αντιστοιχούν σε ασταθείς ιδιοτιμές.

### 1.6.4 Ευστάθεια

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την ευστάθεια, αυτό όμως που ενδιαφέρει πρακτικά είναι η κατάσταση  $(x)$  του συστήματος να μην “εκρήγνυται”. Αυτό πρέπει να ισχύει τόσο για αυτόνομη κίνηση  $(u(t)=0)$  όσο και για βεβιασμένη  $(u(t) \neq 0)$ . Η πρώτη απαίτηση καλείται *ασυμπτωτική ευστάθεια* (asymptotic stability) ενώ η δεύτερη *ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου* (BIBO stability).

Για το γραμμικό σύστημα  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ένα προφανές σημείο ισορροπίας είναι το  $x^* = 0$ , αφού απαιτείται  $Ax(t) = 0$ . Αν όμως ο  $A$  έχει μηδενικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχουν άπειρα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν την εξίσωση ισορροπίας. Στη συνέχεια, η περίπτωση αυτή δεν θα αντιμετωπισθεί.

**Ορισμός 1.4** Το σύστημα  $\{\dot{x}(t) = Ax(t), x(t_0) = x_0\}$  καλείται *ευσταθές κατά Lyapunov* γύρω από το σημείο ισορροπίας  $x^* = 0$ , αν για μικρές μετατοπίσεις γύρω από  $x^* = 0$ , δηλαδή για αρχικές συνθήκες  $x_0$  τέτοιες ώστε,

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta$$

η τροχιά του συστήματος  $\mathbf{x}(t)$  να παραμένει πάντα μέσα σε μια φραγμένη περιοχή του  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ , δηλαδή,

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$$

όπου  $\varepsilon = \varepsilon(\delta) < \infty$ .

**Ορισμός 1.5** Το σύστημα  $\{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\}$  καλείται *ασυμπτωτικά ευσταθές* γύρω από το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  αν υπάρχει μια περιοχή  $\delta$  έτσι ώστε για αρχικές συνθήκες εντός αυτής της περιοχής το σύστημα να τείνει πάντα να επιστρέψει στο  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ , δηλαδή,

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές κατά Lyapunov. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γιατί ένα σύστημα μπορεί να παραμένει διαρκώς σε μια πεπερασμένη απόσταση γύρω από το σημείο ισορροπίας χωρίς ποτέ να το προσεγγίζει ικανοποιητικά. (Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το είδος της αδιάφορης ισορροπίας στην μηχανική).

**Θεώρημα 1.3** Το σύστημα  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  είναι,

- (α) Ευσταθές κατά Lyapunov αν και μόνον αν  $\text{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$  και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές είναι διακεκριμένα.
- (β) Ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνον αν  $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ .

*Απόδειξη:* Η λύση του συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

Το σημείο ισορροπίας είναι το  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  (εκτός αν μία  $\lambda = 0$ ) και χρησιμοποιώντας τον διαγώνιο μετασχηματισμό  $\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}$  έχουμε:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}^{-1} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{W} \mathbf{x}_0$$

Η λύση  $\mathbf{x}(t)$  είναι δηλαδή γραμμικός συνδυασμός των χρονικών εκθετικών  $e^{\lambda_i t}$ . Είναι γνωστό όμως ότι,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$  αν και μόνο αν  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

Αν τώρα κάθε  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\lambda_i t} = 0$ , οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός θα τείνει επίσης στο μηδέν. Αντίστροφα αν ο γραμμικός συνδυασμός δεν τείνει στο μηδέν, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος  $e^{\lambda_i t}$  που δεν τείνει στο μηδέν, πράγμα εφικτό μόνο αν  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ , όπερ άτοπο.

Επειδή η ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του  $A$ , ο πίνακας αυτός καλείται *πίνακας ευστάθειας* του συστήματος (*stability matrix*).

**Ορισμός 1.6** Έστω ότι το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1.2)$$

βρίσκεται σε μηδενικές αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  και διεγείρεται από πεπερασμένες τιμές εισόδου,  $\|\mathbf{u}(t)\| < M < \infty$  για  $0 < t < \infty$ . Καλείται ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου αν κάθε απόκριση  $\mathbf{y}(t)$  είναι επίσης πεπερασμένη, δηλαδή,

$$\|\mathbf{y}(t)\| < P < \infty \text{ για } 0 < t < \infty$$

**Θεώρημα 1.4** Το σύστημα (1.1)-(1.2) είναι ευσταθές φραγμένης-εισόδου φραγμένης εξόδου αν και μόνον αν οι πόλοι των στοιχείων του πίνακα μεταφοράς  $\mathbf{G}(s)$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

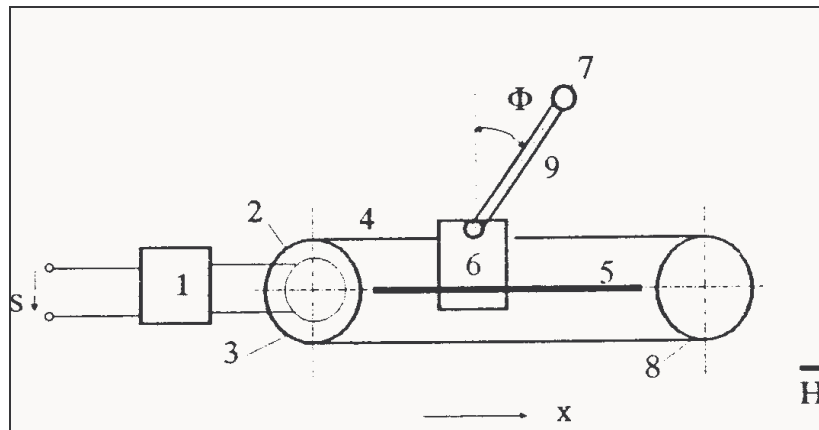
*Παρατήρηση:* Όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου. Το αντίθετο ισχύει μόνον αν το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

## 1.7 Παραδείγματα περιγραφής συστημάτων στο χώρο κατάστασης

### Ανάστροφο εκκρεμές σε φορείο

Το ανάστροφο εκκρεμές είναι ένα από τα πιο γνωστά μη γραμμικά συστήματα και το πρόβλημα του ελέγχου του μπορεί να αποτελέσει κριτήριο απόδοσης των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Εκτός από τον κλασσικό αυτόματο έλεγχο, στο ανάστροφο εκκρεμές έχει εφαρμοστεί έλεγχος με νευρωνικά δίκτυα καθώς επίσης και ελεγκτές ασαφούς λογικής με αξιόλογα αποτελέσματα. Προς το παρόν όμως η κλασσική αντι-

μετώπιση του προβλήματος, εκτός του ότι είναι πιο εύρωστη, μπορεί να παρουσιάσει καλύτερα τις βασικές αρχές και το θεωρητικό υπόβαθρο του αυτομάτου ελέγχου.



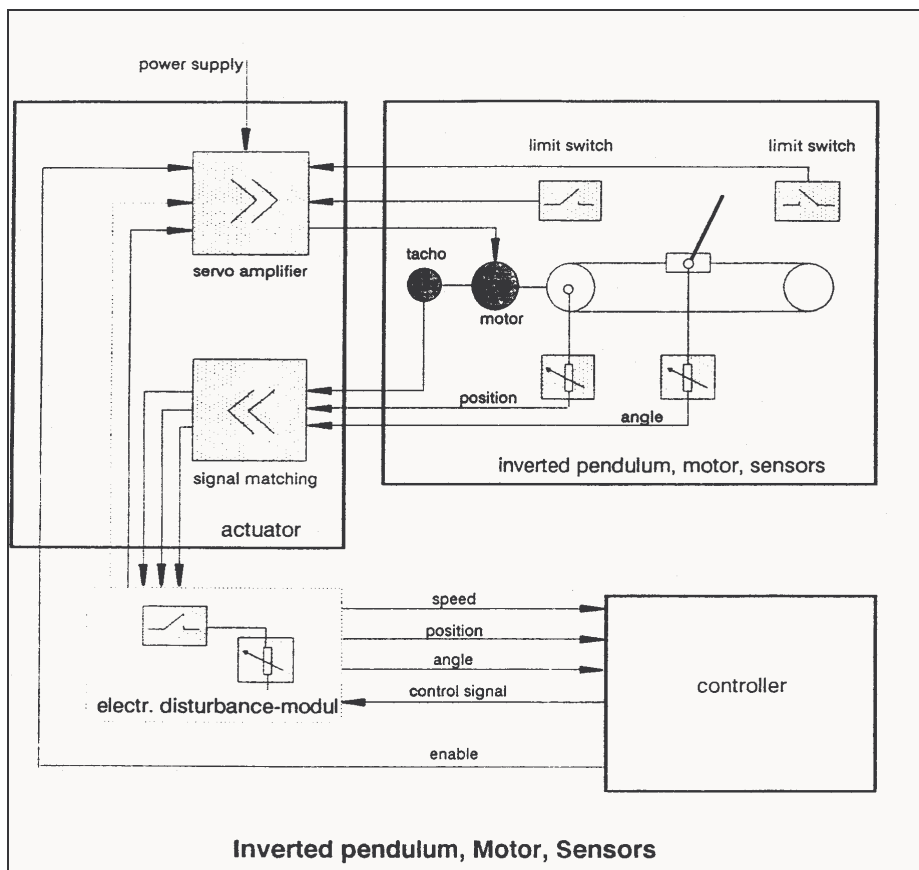
Σχήμα 1.1 Η βασική δομή του συστήματος

- |                    |                              |                        |
|--------------------|------------------------------|------------------------|
| 1. Ενισχυτής       | 4. Ιμάντας μετάδοσης κίνησης | 7. Βάρος του εκκρεμούς |
| 2. Κινητήρας       | 5. Μεταλλική μπάρα ολίσθησης | 8. Οδηγός περιστροφής  |
| 3. Γρανάζι κίνησης | 6. Βαγόνι                    | 9. Εκκρεμές            |

### Περιγραφή του LIP100 Inverted Pendulum

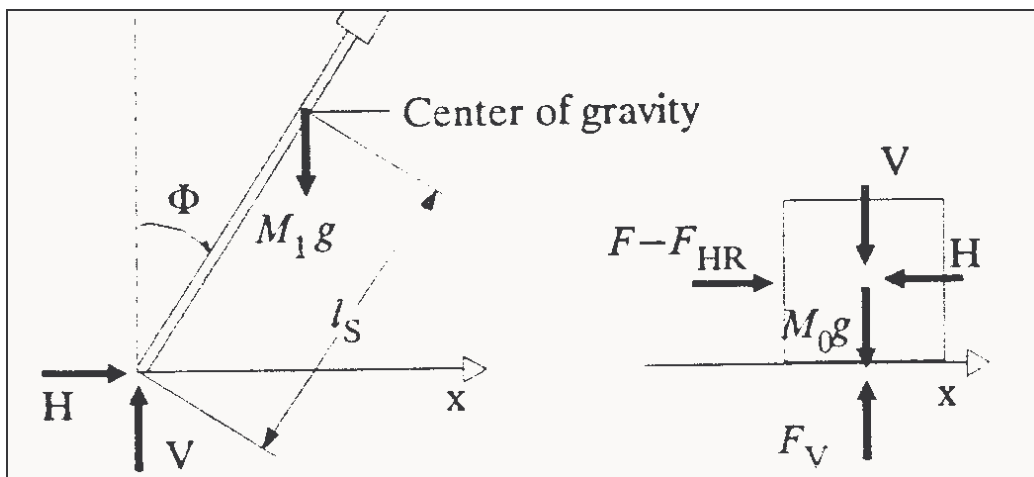
Το σύστημα που υπάρχει στο εργαστήριο αποτελείται από ένα περιστρεφόμενο εκκρεμές το οποίο στηρίζεται σε ένα κινητό βαγόνι (Σχ. 1,1), μία μονάδα διασύνδεσης και έναν ελεγκτή. Το κινητό φορείο (cart) χρησιμοποιεί ένα DC κινητήρα και έναν οδοντωτό ιμάντα για να κινηθεί σε μία περιοχή μήκους 1.5 μέτρων και να σταθεροποιήσει το εκκρεμές στην όρθια θέση. Η σταθεροποίηση του εκκρεμούς επιτυγχάνεται από ένα ψηφιακό ελεγκτή, ο οποίος σύμφωνα με τις μετρήσεις που παίρνει, στέλνει ένα κατάλληλο σήμα στον κινητήρα. Οι μετρήσεις αυτές είναι η γωνία του εκκρεμούς, η θέση και η ταχύτητα του βαγονιού.





© Α. Πουλιέζος  
Σχήμα 1.2 Το διάγραμμα του συστήματος

Το σύστημα μπορεί να χωριστεί σε δύο διαφορετικά υποσυστήματα: το σύστημα του βαγονιού και το σύστημα του ανάστροφου εκκρεμούς:



Σχήμα 1.3 Διαγράμματα ελεύθερων σωμάτων, του ανάστροφου εκκρεμούς και του βαγονιού.

Αν  $M_1$  είναι η μάζα του εκκρεμούς και  $r(t)$  η θέση του βαγονιού τότε η δύναμη  $H(t)$  που ασκείται οριζόντια στη βάση του εκκρεμούς, δίνεται από τον τύπο:

$$H(t) = M_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r(t) + l_s \eta \mu \Phi(t)) \quad (1.3)$$

Αυτή η δύναμη οφείλεται στην επιτάχυνση του κέντρου βάρους. Η κάθετη συνιστώσα μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$V(t) = M_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r(t) + l_s \eta \mu \Phi(t)) + M_1 g \quad (1.4)$$

και η διαφορική εξίσωση της κίνησης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Theta_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V l_s \eta \mu \Phi - H l_s \sigma \nu \Phi - C \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.5)$$

όπου  $\Theta_s$  είναι η ροπή αδρανείας του εκκρεμούς περί το κέντρο βάρους του και  $C$  η σταθερά τριβής του.

Για το σύστημα του βαγονιού η εξίσωση κίνησης είναι η:

$$M_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = F - H - F_r \frac{\partial r}{\partial t} \quad (1.6)$$

όπου  $M_0$  η μάζα του βαγονιού,  $F_r$  η σταθερά τριβής ανάλογη προς τη ταχύτητα και  $F$  η δύναμη που μεταδίδεται μέσω του ιμάντα μεταφοράς.

Έτσι οι εξισώσεις (1.3) και (1.4) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$H(t) = M_1 (\dot{r}(t) + l_s \ddot{\Phi}(t) \sigma \nu \Phi(t) - l_s \dot{\Phi}^2(t) \eta \mu \Phi(t)) \quad (1.7)$$

$$V(t) = -M_1 l_s (\ddot{\Phi}(t) \eta \mu \Phi(t) + \dot{\Phi}^2(t) + \sigma \nu \Phi(t)) + M_1 g \quad (1.8)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.7) και (1.8) στις (1.5) και (1.6) αντίστοιχα, προκύπτουν οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του συστήματος:

$$\Theta \ddot{\Phi} + C \dot{\Phi} - M_1 l_s g \eta \mu \Phi + M_1 l_s \dot{r} \sigma \nu \Phi = 0 \quad (1.9)$$

$$M \ddot{r} + F_r \dot{r} + M_1 l_s (\ddot{\Phi} \sigma \nu \Phi - \dot{\Phi}^2 \eta \mu \Phi) = F \quad (1.10)$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις περιγράφουν το μαθηματικό μοντέλο του ανάστροφου εκκρεμούς όπου:

$$\Theta = \Theta_s + M_1 l_s^2 \quad (1.11)$$

$$M = M_0 + M_1 \quad (1.12)$$

Το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος είναι το,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \Phi \\ \dot{r} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

και το σήμα εισόδου,

$$u = F$$

Μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις (1.9) και (1.10) στην μορφή  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(\mathbf{x}, u) = x_3 \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mathbf{x}, u) = x_4 \\ \dot{x}_3 &= f_3(\mathbf{x}, u) = \beta(x_2) \left[ a_{32} \eta \mu x_2 \sigma \nu x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} \sigma \nu x_2 x_4 + a_{35} \eta \mu x_2 x_4^2 + b_3 u \right] \\ \dot{x}_4 &= f_4(\mathbf{x}, u) = \beta(x_2) \left[ a_{42} \eta \mu x_2 + a_{43} \sigma \nu x_2 x_3 + a_{44} x_4 + a_{45} \sigma \nu x_2 \eta \mu x_2 x_4^2 + b_4 \sigma \nu x_2 u \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

όπου:

$$\beta(x_2) = \left( 1 + \frac{N^2}{N_{01}^2} \eta \mu^2 x_2 \right)^{-1}, \quad N = M_1 l_s, \quad N_{01}^2 = \Theta M - N^2$$

και οι παράμετροι  $a, \beta$  δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} \alpha_{32} &= -\frac{N^2 g}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{33} = -\frac{\Theta F_r}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{34} = \frac{NC}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{35} = \frac{\Theta N}{N_{01}^2} \\ \alpha_{42} &= \frac{MN g}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{43} = \frac{N F_r}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{44} = -\frac{MC}{N_{01}^2}, \quad \alpha_{45} = -\frac{N^2}{N_{01}^2} \\ b_3 &= \frac{\Theta}{N_{01}^2}, \quad b_4 = -\frac{N}{N_{01}^2} \end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα πρέπει να καθοριστεί το σημείο λειτουργίας (ισορροπίας) στο οποίο θα γίνει η γραμμικοποίηση:

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τις εξισώσεις (1.14) σε σειρές Taylor,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A, u=0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A, u=0} \cdot \Delta u \quad (1.15)$$

για να πάρουμε τους πίνακες του γραμμικοποιημένου συστήματος:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A, u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_A \quad (1.16)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A, u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Οι μεταβολές από το σημείο λειτουργίας εισάγονται ως νέες μεταβλητές κατάστασης  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_A$  και  $\delta u = u_A$  οπότε τελικά οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται ως εξής:

$$\dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{A}_A \mathbf{x}_A + \mathbf{b}_A u_A \quad (1.18)$$

Το σύστημα του ανάστροφου εκκρεμούς έχει τρεις αισθητήρες, με τους οποίους μπορούν να μετρηθούν η θέση και η ταχύτητα του βαγονιού και η γωνία του εκκρεμούς. Οι αισθητήρες αυτοί δίνουν μία τάση ρεύματος ανάλογη με τη μέτρηση την οποία κάνουν, οπότε στο μοντελοποιημένο σύστημα όλες οι παράμετροι πρέπει να εκφράζονται στις ίδιες μονάδες, δηλαδή volts. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω ενός μετασχηματισμού κανονικοποίησης ως εξής:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{N} \mathbf{x}_A \quad \text{και} \quad u_N = \mathbf{K}_f u_A \quad (1.19)$$

όπου,

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{bmatrix}$$

και  $K_f$  είναι ο παράγοντας που συσχετίζει την τάση εισόδου του ενισχυτή με την δύναμη που επιδρά στο βαγόνι. Αντικαθιστώντας την (1.19) στην (1.18) παίρνουμε:

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{b}_N u \quad (1.20)$$

όπου,

$$\mathbf{A}_N = N \mathbf{A}_A N^{-1} \quad \text{και} \quad \mathbf{b}_N = N \mathbf{b}_A K_f \quad (1.21)$$

© Α. Πουλιέζος

## 2 Σχεδίαση ελεγκτών

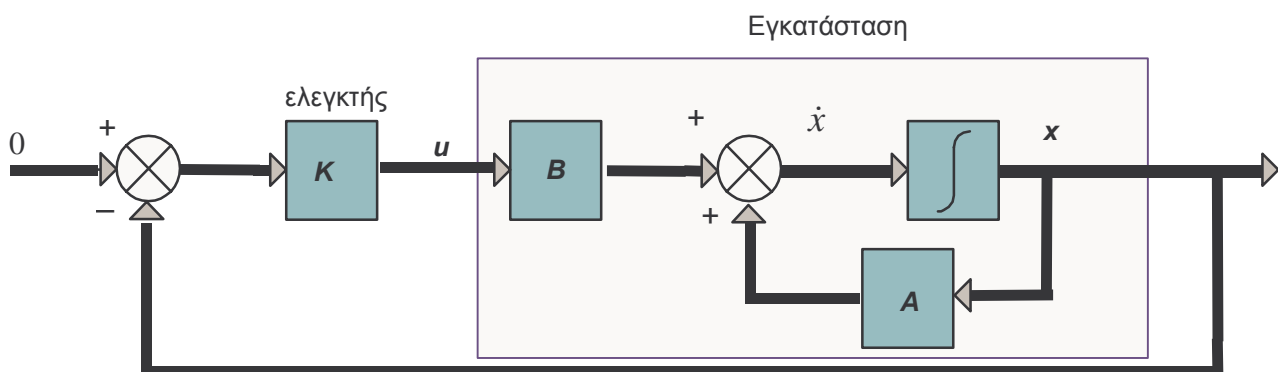
Τα συστήματα ελέγχου μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ευρείες κατηγορίες: *ρύθμισης* και *παρακολούθησης*. Τα συστήματα αυτόματης ρύθμισης ή ρυθμιστές προσπαθούν να διατηρήσουν σταθερή την έξοδο του συστήματος υπό την επήρεια διαταραχών, μεταβολών στις παραμέτρους της εγκατάστασης κλπ. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τα συστήματα ρύθμισης θερμοκρασίας, διατήρησης σταθερού υψομέτρου δορυφόρων, ρύθμισης τάσης κλπ. Κατά τη σχεδίαση των συστημάτων αυτών πρωταρχικό ρόλο παίζει η μεταβατική απόκριση.

Στα συστήματα παρακολούθησης η έξοδος πρέπει να ακολουθεί, με ελάχιστο σφάλμα, μία προδιαγεγραμμένη πορεία που αναπαριστάται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Παραδείγματα αυτού του τύπου περιλαμβάνουν αυτόματους πιλότους αεροσκαφών ή πλοίων.

Σε όλες τις περιπτώσεις ο έλεγχος είναι μία γραμμική συνάρτηση των καταστάσεων, δηλαδή,

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.1)$$

### 2.1 Ρύθμιση



Σχήμα 2.1 Γραμμικός ρυθμιστής

Ας αρχίσουμε με την πιο απλή μορφή συστήματος που απεικονίζεται στο Σχ. 2.1. Στη διάταξη αυτή γίνεται η όχι και τόσο ρεαλιστική υπόθεση ότι όλες οι καταστάσεις είναι μετρήσιμες. Η εξίσωση του είναι,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ u(t) &= -\mathbf{K}x(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})x(t) \quad (2.2)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει το εργαλείο για την εύρεση του (σταθερού) πίνακα  $\mathbf{K}$ .

**Θεώρημα 2.1** Αν το ζευγάρι  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  είναι ελέγξιμο μπορεί να βρεθεί πίνακας  $\mathbf{K}$ , τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές του συστήματος  $\dot{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})x(t)$  να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε θέση.

Το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει τη τοποθέτηση των ιδιοτιμών σε οποιαδήποτε θέση αλλά δεν απαντά στο ερώτημα *ποιά* είναι η βέλτιστη θέση. Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί με διάφορους τρόπους: μέσω των προδιαγραφών της μεταβατικής απόκρισης οι οποίες ορίζουν περιοχές για τους πόλους του συστήματος ή μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου που θα δούμε στη συνέχεια. Η αριθμητική επίλυση είναι εύκολη μέσω του *MATLAB* αφού η,

**K=PLACE (A, B, p)** υπολογίζει έναν πίνακα ανάδρασης κατάστασης  $\mathbf{K}$  τέτοιον ώστε οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  να είναι αυτές που ορίζονται στο διάνυσμα  $\mathbf{p}$ .

## 2.2 Τοποθέτηση πόλων μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου

Η θεωρία του βέλτιστου ελέγχου αποσκοπεί στην εύρεση στρατηγικών ελέγχου μέσω της ελαχιστοποίησης κριτηρίων απόδοσης. Η εφαρμογή της στη συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων που εξετάζουμε (γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα) καταλήγει σε κομψούς, υλοποιήσιμους ελεγκτές.

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Να βρεθεί η συνάρτηση εισόδου  $u(t)$  που να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό (δηλαδή συνάρτησης συναρτήσεως),

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t) \mathbf{Q} x(t) + u^T(t) \mathbf{R} u(t)) dt$$

υπό τον περιορισμό των εξισώσεων κατάστασης,

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Η φυσική σημασία της ελαχιστοποίησης είναι να περιορίσει την κατάσταση κοντά στο μηδέν με ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας. Οι πίνακες  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  χρησιμοποιούνται

για να εξισορροπούν τις δύο αυτές ιδιότητες. Εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου του Pontryagin δίνει την ακόλουθη λύση στο πρόβλημα αυτό,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) \quad (2.4)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t); \mathbf{P}(T) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Η εξίσωση (2.5) είναι η *μητρική διαφορική εξίσωση Riccati*. Είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με τερματικές οριακές συνθήκες. Ο έλεγχος που προκύπτει είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και για να υλοποιηθεί πρέπει να λυθεί η (2.5) προς τα πίσω αρχίζοντας από το τελικό χρόνο  $t = T$ . Η λύση πρέπει να αποθηκευθεί ψηφιακά για να χρησιμοποιηθεί συνέχεια από τον μηχανισμό του ελεγκτή. Μία πιο απλή λύση προκύπτει αν τεθεί  $t = \infty$ . Στη περίπτωση αυτή  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{0}$  και η (2.5) καταλήγει στην *μητρική αλγεβρική εξίσωση Riccati*,

$$\mathbf{0} = -\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής καταλήγει σε σταθερό πίνακα ανατροφοδότησης  $\mathbf{K}$  ο οποίος συν τοις άλλοις οδηγεί σε ένα συνολικά ευσταθές σύστημα αν: το ζεύγος  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  είναι σταθεροποιήσιμο,  $\mathbf{R} > 0$  (θετικά ορισμένος) και ο  $\mathbf{Q}$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_q^T\mathbf{C}_q$  όπου  $\mathbf{C}_q$  είναι οποιοσδήποτε πίνακας τέτοιος ώστε το ζεύγος  $(\mathbf{C}_q, \mathbf{A})$  να είναι εντοπίσιμο.

$[\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{E}] = \text{LQR}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$  υπολογίζει τον βέλτιστο πίνακα ενίσχυσης  $\mathbf{K}$  έτσι ώστε ο έλεγχος ανάδρασης καταστάσεων  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους  $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{N}\mathbf{u}(t)) dt$  υπό τον περιορισμό της εξίσωσης κατάστασης  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Ο ελεγκτής που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία καλείται *γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής (Linear Quadratic Regulator-LQR)*.

### 2.3 Παρακολούθηση

Έστω ξανά το γνωστό σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$



Στο πρόβλημα της παρακολούθησης η επιθυμητή τελική θέση είναι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ .

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ιδωθεί σαν μία υποπερίπτωση του γενικότερου προβλήματος  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{J}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$  (αν  $\mathbf{J}=\mathbf{I}$ ). Ο πίνακας  $\mathbf{J}$ , διάστασης  $m_j \times n$ , επιλέγει τις με-

ταβλητές που επιθυμούμε να παρακολουθήσουμε. Ο λόγος που εισάγεται ένας νέος πίνακας είναι ότι είναι δυνατό να παρακολουθούνται περισσότερες μεταβλητές από αυτές που παρατηρούνται, δηλαδή  $m_j > m$ . Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί παρόμοια με αυτό του ρυθμιστή αν εισάγουμε μία νέα μεταβλητή,

$$\mathbf{p}(t) = \int (\mathbf{J}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}) dt \quad (2.7)$$

οπότε επαυξάνοντας την αρχική εξίσωση παίρνουμε,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

Στη σταθερή κατάσταση,  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  οπότε,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{p}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

και ορίζοντας νέες μεταβλητές,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s \\ \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_s \end{bmatrix}, \mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s$$

καταλήγουμε στο σύστημα,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{v}(t) \quad \text{με } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Καταφέραμε να τροποποιήσουμε το πρόβλημα έτσι ώστε να τεθεί στη μορφή που ξέρουμε να λύσουμε: σαν ένα πρόβλημα ρύθμισης. Έτσι βρίσκοντας έναν πίνακα ανάδρασης  $\hat{\mathbf{K}}$  για το σύστημα (2.8), καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις:

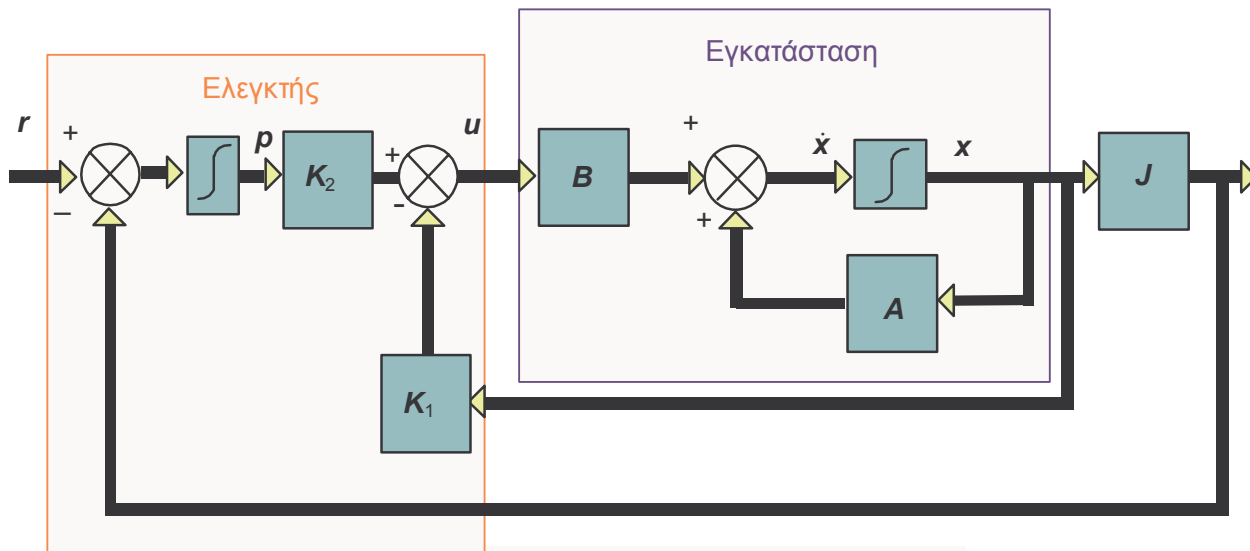
$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t) = -\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1 \\ \hat{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) = -\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_1(t) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_2(t) \\ \Rightarrow \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s &= -\hat{\mathbf{K}}_1 (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) - \hat{\mathbf{K}}_2 (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_s) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{p}(t) \quad (2.9)$$

Με την τιμή αυτή για το σήμα ελέγχου  $u(t)$  το σύστημα (2.6) γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

Το δομικό διάγραμμα του συνολικού συστήματος φαίνεται στο Σχ. 2.2.



Σχήμα 2.2 Δομικό διάγραμμα για το πρόβλημα της παρακολούθησης

Η διαδικασία αυτή είναι δυνατή εφόσον ισχύουν οι γνωστές προϋποθέσεις, δηλαδή να είναι το ζεύγος  $(\hat{A}, \hat{B})$  ελέγξιμο. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τις συνθήκες για να συμβαίνει αυτό.

**Θεώρημα 2.2** Το ζεύγος  $(\hat{A}, \hat{B})$  είναι ελέγξιμο αν και μόνον αν το ζεύγος  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο και ο πίνακας,

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ J & 0_{m_j \times r} \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους τάξης ίσης προς τον αριθμό των σειρών  $(n + m_j)$ . Επειδή ο αριθμός των στηλών είναι  $(n + r)$  πρέπει  $r \geq m_j$ , δηλαδή οι εισοδοί πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες και οι καταστάσεις που θέλουμε να παρακολουθηθούν.

Τα χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης εξαρτώνται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του συνολικού πίνακα κατάστασης,

$$\begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ J & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι επιθυμητά χαρακτηριστικά όπως υπερύψωση και ταχύτητα απόκρισης μπορούν να ικανοποιηθούν με την κατάλληλη επιλογή του πίνακα  $\hat{K}$ .

## 2.4 Παρατηρητές κατάστασης

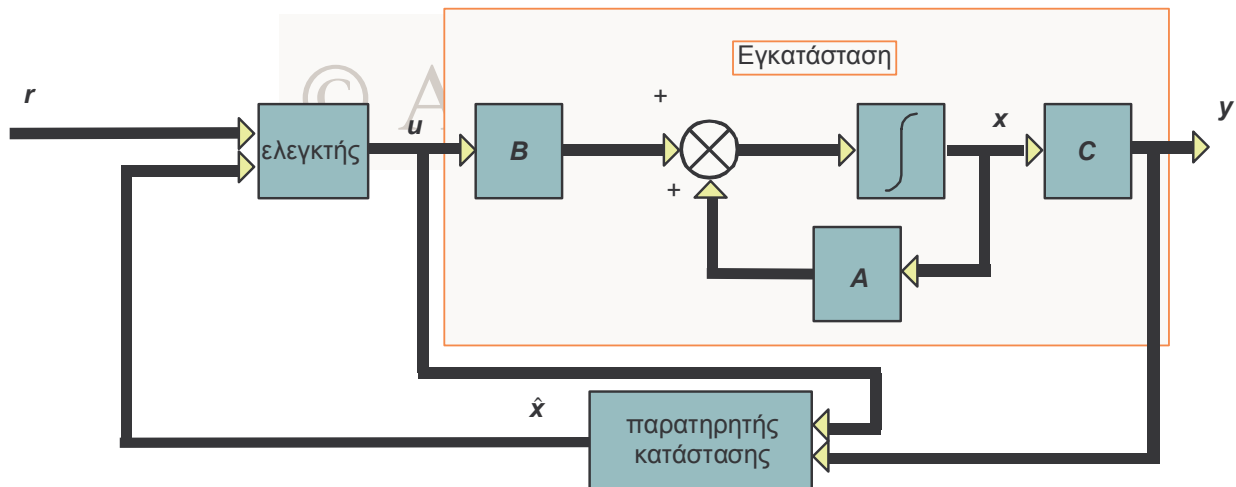
Το διάνυσμα κατάστασης είναι σχεδόν πάντα μη διαθέσιμο όλο για μέτρηση. Μια πιο ρεαλιστική περίπτωση είναι αυτή όπου το μετρήσιμο σύνολο δίνεται από την εξίσωση εξόδου,

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.10)$$

Στη περίπτωση αυτή είναι μεγάλης σημασίας η λεγόμενη,

**Αρχή Διαχωρισμού:** Αν το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο τότε σαν είσοδος στο μηχανισμό ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία εκτίμηση της κατάστασης, διαχωρίζοντας έτσι το συνολικό πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα: του ελέγχου και της εκτίμησης.

Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο Σχ. 2.3. Ο αλγόριθμος εκτίμησης καλείται **παρατηρητής κατάστασης** στην ορολογία των συστημάτων ελέγχου.



Σχήμα 2.3 Παρακολούθηση με παρατηρητές κατάστασης

Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι αν η εκτίμηση  $\hat{x}$  θα συγκλίνει προς την πραγματική κατάσταση. Μία προσέγγιση στο πρόβλημα είναι ο παρατηρητής να χρησιμοποιήσει τους γνωστούς πίνακες  $A$ ,  $B$  για να μιμηθεί το ελεγχόμενο σύστημα. Έτσι αν η εξίσωση του παρατηρητή είναι η,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

η εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης  $\tilde{x}(t)$  είναι,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \\
\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0 \\
\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{x}}_0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το σφάλμα εκτίμησης θα συγκλίνει στο μηδέν αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι ευσταθής. Το πρόβλημα είναι ότι αφενός ο  $\mathbf{A}$  μπορεί να είναι ασταθής, αφετέρου η σύγκλιση επιτυγχάνεται με ρυθμό που μπορεί να είναι ανεπαρκής. Και τα δύο προβλήματα λύνονται με τη χρήση ανατροφοδότησης και στον παρατηρητή μέσω ενός όρου διόρθωσης ως εξής:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \tag{2.12}$$

Έτσι η εξίσωση του σφάλματος γίνεται,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \tag{2.13}$$

Με το τέχνασμα αυτό ο πίνακας μετάβασης του σφάλματος γίνεται  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ , οι ιδιοτιμές του οποίου ρυθμίζονται μέσω του  $\mathbf{L}$ . Η ρύθμιση αυτή είναι εφικτή αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Η εύρεση του  $\mathbf{L}$  επιτυγχάνεται όπως και του  $\mathbf{K}$  (είναι μάλιστα δυσκό πρόβλημα), δηλαδή μέσω της,

**$\mathbf{L} = \text{PLACE}(\mathbf{A}^\top, \mathbf{C}^\top, \mathbf{q})$**  που υπολογίζει έναν πίνακα ανάδρασης κατάστασης  $\mathbf{L}$  τέτοιον ώστε οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$  να είναι αυτές που ορίζονται στο διάνυσμα  $\mathbf{q}$ .

Η συνολική εξίσωση του συστήματος βρίσκεται αν επαυξήσουμε την εξίσωση κατάστασης με την εξίσωση του παρατηρητή, δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} u(t) \tag{2.14}$$

Επιπρόσθετα αν ο έλεγχος είναι της μορφής της (2.9), δηλαδή,

$$u(t) = -\hat{\mathbf{K}}_1 \hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{K}}_2 p(t)$$

τότε η (2.14) γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}_1 & -\mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}_2 \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}_1 - \mathbf{L}\mathbf{C} & -\mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}_2 \\ \mathbf{J} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m_j \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \\ -\mathbf{I}_{m_j \times m} \end{bmatrix} \mathbf{r} \tag{2.15}$$

Το σύστημα (2.15) είναι ένα σύστημα  $2n+m_j$  εξισώσεων και περιλαμβάνει την κατάσταση, τον παρατηρητή και τον παρακολουθητή.

Οι απαραίτητες εξισώσεις για την υλοποίηση του ελεγκτή είναι οι (2.9), (2.12) και

Ο προαναφερόμενος παρατηρητής καλείται *παρατηρητής πλήρους τάξης*. Μία πιο “οικονομική” εκδοχή του παρατηρητή αυτού μπορεί να υλοποιηθεί αν εκτιμούμε μόνο τις καταστάσεις που δεν είναι παρατηρήσιμες.

### 2.4.1 Παρατηρητής μειωμένης τάξης

Ο παρατηρητής μειωμένης τάξης στηρίζεται στο γεγονός ότι αν η διάσταση του διανύσματος εξόδου  $y(t)=Cx(t)$  είναι  $m (<n)$ , δεν υπάρχει λόγος να εκτιμούμε περισσότερες από  $n-m$  καταστάσεις. Ο παρατηρητής που προκύπτει καλείται *παρατηρητής μειωμένης τάξης* ή *παρατηρητής Luenberger*. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Κατ’ αρχήν ορίζουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό της κατάστασης,

$$z(t) = \begin{matrix} T \\ (n-m) \times 1 \end{matrix} x(t) \quad \begin{matrix} (n-m) \times n \end{matrix}$$

όπου ο  $T$  είναι κάποιος πίνακας τέτοιος ώστε ο  $E = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$  να έχει αντίστροφο και έστω αυτός  $E^{-1} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$ . Αυτό θα είναι δυνατό αν βαθμός( $C$ )= $m$ . Συνδυάζοντας τα  $y, z$ ,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x(t) \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = Py(t) + Mz(t)$$

Επομένως,

$$\hat{x}(t) = P\hat{y}(t) + M\hat{z}(t)$$

Για να εκτιμήσουμε το  $z$  χρειαζόμαστε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του. Προπολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κατάστασης με τον  $E$  παίρνουμε,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= EAx(t) + EBu(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Ax(t) + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu(t) \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu(t) \end{aligned}$$

ή

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CAP} & \mathbf{CAM} \\ \mathbf{TAP} & \mathbf{TAM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{TB} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση για το  $z$  είναι η,

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}_{22}z(t) + (\mathbf{A}_{21}y(t) + \mathbf{B}_2u(t))$$

Ένας παρατηρητής πλήρους τάξης για το  $z$ , είναι ο,

$$\dot{\hat{z}}(t) = \mathbf{A}_{22}\hat{z}(t) + (\mathbf{A}_{21}y(t) + \mathbf{B}_2u(t)) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t))$$

Δυστυχώς ο διορθωτικός όρος  $\mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t))$  ισούται με μηδέν, αφού,

$$y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t) = y(t) - \mathbf{C}(\mathbf{P}y(t) + \mathbf{M}\hat{z}(t)) = y(t) - \mathbf{C}\mathbf{P}y(t) - \mathbf{C}\mathbf{M}\hat{z}(t) = y(t) - y(t) = \mathbf{0}$$

Μία εναλλακτική επιλογή είναι ο διορθωτικός όρος να είναι συνάρτηση της παραγώγου του  $y$ ,

$$\dot{\hat{z}}(t) = \mathbf{A}_{22}\hat{z}(t) + (\mathbf{A}_{21}y(t) + \mathbf{B}_2u(t)) + \mathbf{L}(\dot{y}(t) - \mathbf{A}_{11}y(t) - \mathbf{B}_1u(t) - \mathbf{A}_{12}\hat{z}(t))$$

Συγκλίνει ο παρατηρητής αυτός προς την πραγματική τιμή του  $z$ ; Η εξίσωση σφάλματος είναι,

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\tilde{z}(t)$$

και το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί θετικά αν ο πίνακας  $\mathbf{L}$  μπορεί να σταθεροποιήσει την εξίσωση σφάλματος. Αποδεικνύεται ότι παρατηρησιμότητα του ζεύγους  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  συνεπάγεται και παρατηρησιμότητα του  $(\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22})$  [Luenberger, 1964].

Ορίζοντας,

$$\mathbf{w}(t) = z(t) - \mathbf{L}y(t)$$

καταλήγουμε στη τελική μορφή του παρατηρητή μειωμένης τάξης,

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{w}(t) + \mathbf{H}y(t) + \mathbf{G}u(t) \quad (2.16)$$

$$\hat{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{w}(t) + \mathbf{N}y(t) \quad (2.17)$$

με τους πίνακες να ορίζονται από τις σχέσεις,

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{F}\mathbf{L} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{L}$$

Το συνολικό σύστημα κατάστασης-παρατηρητή είναι το εξής:

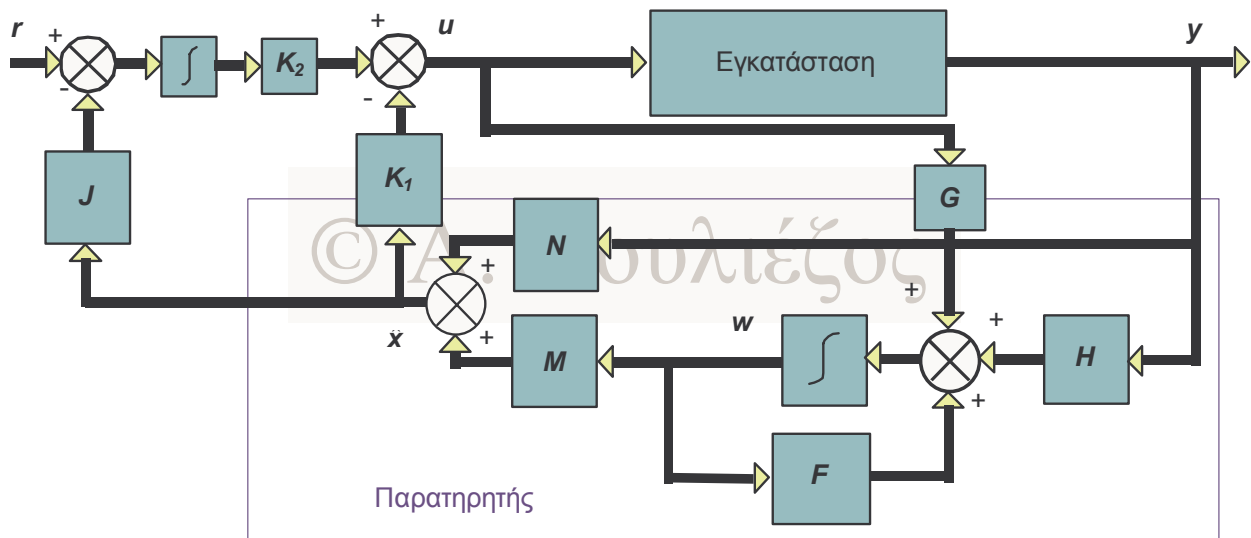
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ HC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} u(t) \quad (2.18)$$

Στο πρόβλημα παρακολούθησης, ο έλεγχος δίνεται από την (2.9), δηλαδή,

$$u(t) = -\hat{K}_1 \hat{x}(t) - \hat{K}_2 p(t) = -K_1 \hat{x}(t) - K_2 \int (J \hat{x}(t) - r) dt \quad (2.19)$$

όπου έγινε χρήση της (2.17). Έτσι οι εξισώσεις που χρειάζονται για την υλοποίηση του ελεγκτή (που πρέπει να περιέχουν μόνο εισόδους και εξόδους) είναι οι (2.16), (2.17) και (2.19).

Το δομικό διάγραμμα του παρατηρητή μειωμένης τάξης φαίνεται στο Σχ. 2.4.



Σχήμα 2.4 Παρατηρητής μειωμένης τάξης

Αντικαθιστώντας στην (2.18) παίρνουμε τη συνολική εξίσωση κατάστασης-παρατηρητή μειωμένης τάξης-παρακολουθητή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1NC & -BK_1M & -BK_2 \\ HC - GK_1NC & F - GK_1M & -GK_2 \\ J & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} r$$

ή

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}r$$

## **Βιβλιογραφία**

Wolovich (1987). Robotics: Basic Analysis & Design.

Luenberger D.G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron.*, **MIL-8**, pp.74-80.

© Α. Πουλιέζος